第11講　指数法則と計算，指数関数のグラフ

§1　指数の整数への拡張

要点整理 と 公式

要点1　a^0，a^{-n} の定義

a の「n 乗」… a を n 個掛け合わせたもの。

$a^n = a \times a \times \cdots\cdots \times a$　　　n を「指数」という。

a^1，a^2，a^3，…… を，a の「累乗」という。

m，n が「正の整数」のとき，以下の法則が成り立つ。

■ 指数法則

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$　　　(ex) $a^2 \times a^3 =$

② $(a^m)^n = a^{m \times n}$　　　(ex) $(a^2)^3 =$

③ $(ab)^n = a^n b^n$　　　(ex) $(ab)^2 =$

また，$m > n$ のとき，$a^m \div a^n = a^{m-n}$ である。　　(ex) $a^6 \div a^2 =$

ここでは，指数が 0 や負の場合でも上の指数法則が成り立つように，累乗 a^n の意味を定める。

①において，$n = 0$ のときも成り立つとすると

$a^m \times a^0 = a^{m+0} = a^m$　　　よって　$a^0 =$

①において，$m + n = 0$，つまり $n = -m$ のときも成り立つとすると

$a^m \times a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = 1$　　　よって　$a^{-m} =$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって，指数が0や負の整数のときの累乗を，次のように定める。

■ a^0，a^{-n} の定義

$a \neq 0$ で，n が正の整数のとき

$a^0 = 1$,　　$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$a^0 = 1$，$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ と定めることにより，m，n が正の整数のときだけでなく，0や負の整数のときにも指数法則が成り立つ。

(ex) ① $a^5 \times a^{-3} = a^5 \times \qquad = a^2 =$ 　　　よって $a^5 \times a^{-3} = a^{5+(-3)}$

② $(a^3)^{-2} = \dfrac{1}{\qquad} = \dfrac{1}{a^6} =$ 　　　よって $(a^3)^{-2} = a^{3\times(-2)}$

③ $(ab)^{-3} = \dfrac{1}{\qquad} = \dfrac{1}{a^3b^3} = \dfrac{1}{a^3} \times \dfrac{1}{b^3} =$ 　　　よって $(ab)^{-3} = a^{-3}b^{-3}$

また，$a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^m \times \dfrac{1}{a^n} = a^m \times \qquad = a^{m-n}$ より $a^m \div a^n = a^{m-n}$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = (a \qquad)^n = a^n(b^{-1})^n = a^nb^{-n} = \dfrac{a^n}{\qquad}$ 　より $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ 　である。

よって，以下の指数法則が成り立つ。

■ 指数法則

$a \neq 0$，$b \neq 0$ で，m，n が「整数」のとき

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 　　　①′ $a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

② $(a^m)^n = a^{m\times n}$

③ $(ab)^n = a^nb^n$ 　　　③′ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

次の計算をせよ。

(1)　$a^5 \times a^{-3}$

(2)　$a^{-6} \div a^{-2} \times a^4$

(3)　$(a^{-3})^{-4}$

(4)　$(a^4b^{-3})^{-2}$

Point Pickup

指数の拡張と指数法則

$a^0 = 1$,　　$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

①　$a^m \times a^n = a^{m+n}$

①′　$a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

②　$(a^m)^n = a^{m \times n}$

③　$(ab)^n = a^nb^n$

③′　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 累乗根とその性質

要点整理 と 公式

要点2 累乗根

正の整数 n に対し，n 乗して a になる数，つまり

方程式　$x^n = a$　　の解 x

を，a の「n 乗根」といい，a の 2 乗根(「平方根」)，3 乗根(「立方根」)，4 乗根，…… を a の「累乗根」という。

(ex) $2^3 = 8$ より，2 は 8 の「　　乗根」

$(-2)^5 = -32$ より，-2 は -32 の「　　乗根」

$2^4 = 16$，$(-2)^4 = 16$より，2 と -2 はともに 16 の「　　乗根」

以下では，「正の数 a」の n 乗根のうち，「正であるもの」について考える。

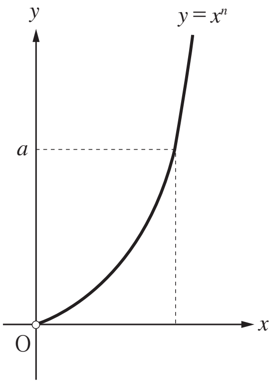
つまり，方程式　$x^n = a$ $(a > 0)$ の解 x のうち，$x > 0$ であるものを考える。

関数 $y = x^n$ $(x > 0)$ のグラフは右図のようになる。

このグラフで $y = a$ $(a > 0)$を満たす数 x が，

a の正の n 乗根である。グラフより，それはただ 1 つである。

この a の正の n 乗根を，「　　　」と表す。



(ex) $\sqrt[3]{8}$ は，「3 乗して 8 になる数のうち，正のもの」。

$8 = 2^3$ より，それは「　　」である。

よって $\sqrt[3]{8} =$

※特に $n = 2$ のとき，$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$　とこれまで通り表す。

また，$\sqrt[n]{0} = 0$ と定める。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

一般に，$a>0$，n が正の整数のとき，以下のことが成り立つ。

$$\sqrt[n]{a}>0,\qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a,\qquad \sqrt[n]{a^n}=a$$

(ex) $\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=$

要点 3 累乗根の性質

累乗根について，次の性質が成り立つ。

■ 累乗根の性質

$a>0$，$b>0$ で，m，n が正の整数のとき

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　(ex) $\sqrt[5]{2}\sqrt[5]{3}=\sqrt[5]{2\times3}=\sqrt[5]{6}$

② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　　(ex) $\dfrac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\dfrac{10}{2}}=\sqrt[4]{5}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　　(ex) $(\sqrt[3]{5})^2=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$　　(ex) $\sqrt{\sqrt[3]{7}}=\sqrt[2\times3]{7}=\sqrt[6]{7}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt[3]{24}$　　(2)　$\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{125}$　　(3)　$\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$

(4)　$\left(\sqrt[6]{9}\right)^3$　　(5)　$\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

Point Pickup

累乗根とその性質

$a>0$，$b>0$ で，m，n が正の整数のとき

$\sqrt[n]{a^n}=a$

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　　$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$　　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 指数の有理数への拡張

要点整理 と 公式

要点4 有理数の指数

指数が有理数のときにも指数法則

$a^m \times a^n = a^{m+n}$　　　$a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m\times n}$　　　$(ab)^n = a^n b^n$

が成り立つように，以下のように定める。

■ **有理数を指数とする累乗**

$a>0$，$b>0$で，m，nが正の整数，rが正の有理数のとき

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$　　　(ex)　$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt{a}$

$a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$　　　(ex)　$a^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\quad}$

また，この定義に基づくことで，以下の指数法則が，有理数の指数に対しても成り立つ。

■ **指数法則**

$a>0$，$b>0$で，r，sが「有理数」のとき

① $a^r \times a^s = a^{r+s}$　　　①′ $a^r \div a^s = \dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

② $(a^r)^s = a^{r\times s}$

③ $(ab)^r = a^r b^r$　　　③′ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

※上記の指数法則は，その指数を「実数」の範囲まで広げてもそのまま成り立つ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

［1］　次の値を求めよ。　(1)　$8^{\frac{2}{3}}$　　(2)　$9^{-\frac{1}{2}}$

［2］　次の計算をせよ。

(1)　$3^{\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{2}{3}} \div 3^{\frac{5}{12}}$　　(2)　$\left(8^{-\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{9}}$

(3)　$\sqrt[3]{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt[6]{5}$　　(4)　$\sqrt[6]{32} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} \div \sqrt[3]{2}$

Point Pickup

有理数を指数とする累乗

$a > 0,\ b > 0$で，$m,\ n$が正の整数，rが正の有理数のとき

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$　　　$a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$

指数法則

$a > 0,\ b > 0$で，$r,\ s$が有理数のとき

①　$a^r \times a^s = a^{r+s}$　　①′　$a^r \div a^s = \dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

②　$(a^r)^s = a^{r \times s}$

③　$(ab)^r = a^r b^r$　　③′　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

累乗根 $\sqrt[n]{a^m}$ を $a^{\frac{m}{n}}$ の形に表し，指数法則を用いて計算する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 指数関数とそのグラフ

要点整理 と 公式

要点5 指数関数とそのグラフ

a を 1 でない正の定数とするとき，関数「　$y=a$　　」を

　a を「　　　」とする x の「　　　　　」という。

指数関数 $y=2^x$ のグラフについて考える。

$x=1,\ 2,\ 3$ のとき，$y=2,\ 4,\ 8$

$x=0$ のとき，$y=2^0=$

$x=-1,\ -2,\ -3$ のとき，$y=2^{-1},\ 2^{-2},\ 2^{-3}=$

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき，$y=2^{\frac{1}{2}}=$

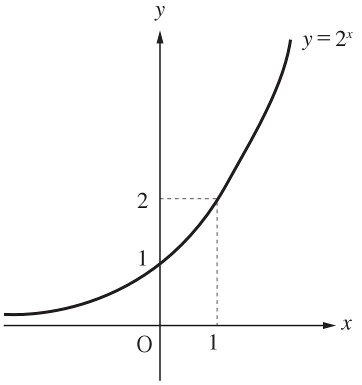
である。

x が無理数の場合も含め，x に対応する y の値を求め，

$x,\ y$ の値の組 $(x,\ y)$ を座標とする点を座標平面上にとると，

右図のような曲線が得られる。

　これが指数関数　$y=2^x$　のグラフである。



次に，指数関数　$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　のグラフについて考える。この式は

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1^x}{2^x}=\frac{1}{2^x}=2^{-x}$$

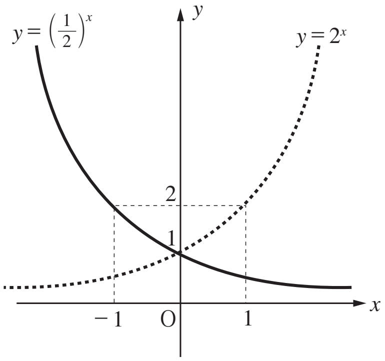
と変形できる。この式は，$y=2^x$ の式の x が $-x$ におき換わったものである。

よって，$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフは，

$y=2^x$ のグラフと「y 軸に関して対称」である。

関数 $y=a^x$ のグラフと，関数 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ のグラフは，

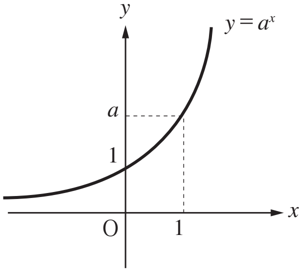
y 軸に関して対称である。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

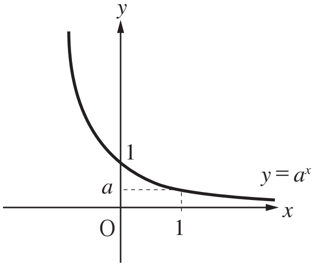
一般に，指数関数 $y = a^x$ のグラフは以下のようになる。

■ 指数関数のグラフ



$a > 1$ のとき

右上がり



$0 < a < 1$ のとき

右下がり

いずれも x 軸を「漸近線」としてもち，$(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通る。

定義域は実数全体，値域は「　　　　　　」である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

関数 $y=3^x$ のグラフをかけ。

また，それと同じ座標平面上に，関数 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ のグラフをかけ。

Point Pickup

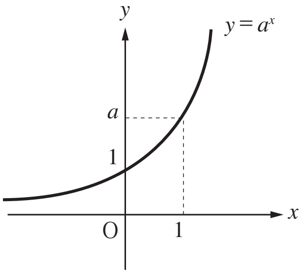
指数関数 $y=a^x$ のグラフ

・$a>0$ のとき「右上がり」，$0<a<1$ のとき「 右下がり 」の曲線

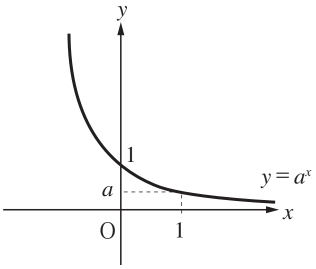
・x 軸を漸近線としてもつ。

・$(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通る。

・x の変域は実数全体，y の変域は $y>0$



$a>1$ のとき



$0<a<1$ のとき

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　確認テスト

1　次の計算をせよ。

(1)　$a^4 \times a^{-3} \div a^{-2} = a^{\boxed{ア}}$　　(2)　$(a^{-4})^2 = a^{-\boxed{イ}} = \dfrac{1}{a^{\boxed{イ}}}$

2　次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt[3]{8} = \boxed{ウ}$　　(2)　$\sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{27} = \boxed{エ}$　　(3)　$\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}} = \boxed{オ}$

3　次の計算をせよ。

(1)　$2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{12}} \div 2^{\frac{3}{4}} = \boxed{カ}$　　(2)　$\sqrt[3]{27} \times \sqrt[4]{81} \div \sqrt{9} = \boxed{キ}$

4　次の $\boxed{}$ にあてはまるものを，下の①～④から選べ。

指数関数 $y = a^x$ のグラフは，$a > 1$ のとき $\boxed{ク}$，$0 < a < 1$のとき $\boxed{ケ}$ の曲線である。

また，$\boxed{コ}$ を漸近線にもつ。

関数 $y = a^x$　のグラフと，$y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ のグラフは $\boxed{サ}$ に関して対称である。

①　右上がり　　②　右下がり　　③　x 軸　　④　y 軸

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　指数法則と計算，指数関数のグラフ

1

(1)　$a^5 \times a^{-3} = a^{5-3} = a^2$

(2)　$a^{-6} \div a^{-2} \times a^4 = a^{-6-(-2)+4} = a^{-6+2+4} = a^0 = 1$

(3)　$(a^{-3})^{-4} = a^{(-3)\times(-4)} = a^{12}$

(4)　$(a^4 b^{-3})^{-2} = a^{4\times(-2)} b^{(-3)\times(-2)} = a^{-8} b^6 = \dfrac{b^6}{a^8}$

2

(1)　$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3}$

(2)　$\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{125} = \sqrt[4]{5 \times 125} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

(3)　$\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\dfrac{32}{2}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

(4)　$\left(\sqrt[6]{9}\right)^3 = \sqrt[6]{9^3} = \sqrt[6]{(3^2)^3} = \sqrt[6]{3^6} = 3$

(5)　$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3\times 2]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

3

［1］(1)　$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{2^6} = 4$

(2)　$9^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$

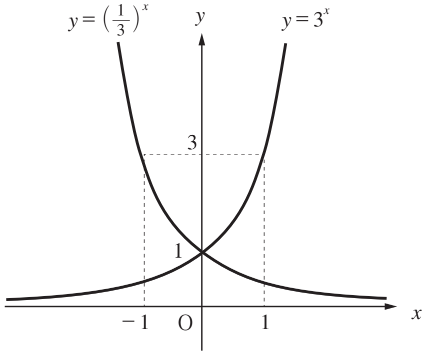
［2］(1)　$3^{\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{2}{3}} \div 3^{\frac{5}{12}} = 3^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{5}{12}} = 3^{\frac{9+8-5}{12}} = 3^1 = 3$

(2)　$\left(8^{-\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{9}} = 8^{\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{9}} = 8^{-\frac{1}{3}} = (2^3)^{-\frac{1}{3}} = 2^{3\times\left(-\frac{1}{3}\right)} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

(3)　$\sqrt[3]{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2+3+1}{6}} = 5^1 = 5$

(4)　$\sqrt[6]{32} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} \div \sqrt[3]{2} = (2^5)^{\frac{1}{6}} \times 2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5-3-2}{6}} = 2^0 = 1$

4



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　確認テスト

1　次の計算をせよ。

(1)　$a^4 \times a^{-3} \div a^{-2} = a^{\boxed{ア}}$　　(2)　$(a^{-4})^2 = a^{-\boxed{イ}} = \dfrac{1}{a^{\boxed{イ}}}$

2　次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt[3]{8} = \boxed{ウ}$　　(2)　$\sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{27} = \boxed{エ}$　　(3)　$\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}} = \boxed{オ}$

3　次の計算をせよ。

(1)　$2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{12}} \div 2^{\frac{3}{4}} = \boxed{カ}$　　(2)　$\sqrt[3]{27} \times \sqrt[4]{81} \div \sqrt{9} = \boxed{キ}$

4　次の$\boxed{}$にあてはまるものを，下の①～④から選べ。

指数関数 $y = a^x$ のグラフは，$a > 1$ のとき $\boxed{ク}$，$0 < a < 1$のとき $\boxed{ケ}$ の曲線である。

また，$\boxed{コ}$ を漸近線にもつ。

関数 $y = a^x$　のグラフと，$y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ のグラフは $\boxed{サ}$ に関して対称である。

①　右上がり　　②　右下がり　　③　x 軸　　④　y 軸

{ 解答 }

1　(1)　ア　3　　(2)　イ　8

2　(1)　ウ　2　　(2)　エ　3　　(3)　オ　2

3　(1)　カ　1　　(2)　キ　3

4　ク　①　　ケ　②　　コ　③　　サ　④

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。